Corso Zero di Matematica
CdL Scienze Biologiche

Sezione 4

La Radice n-esima

Sia $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ e $c \in \mathbb{R}$, $c \geq 0$

Teorema (esistenza e unicità radice n-esima)

Esiste uno ed un solo numero reale $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$ soluzione dell'equazione

$$\boxed{x^n = c}$$

Def Tale soluzione, essendo unica, verrà definita come radice n-esima di c

$$x = \sqrt[n]{c} = (c)^{\frac{1}{n}}$$

Osservazione: (•) $\sqrt[n]{0} = 0$

(•) se $c > 0 \Rightarrow \sqrt[n]{c} > 0$

(•) se n è pari, e se $x = \sqrt[n]{c}$

allora anche $(-x)^n = x^n = c$

ossia anche $-x$ verifica l'equazione

$$\boxed{x^n = c}$$

(·) se n è dispari, dalla regola dei segni non ci saranno soluzioni negative di

$$x^n = c$$

(·) se $\boxed{c < 0}$

(··) se n è pari $x^n = c$

non ammette sol

(··) n è dispari, l'unica soluzione di $x^n = c$ è

$$\boxed{x = -\sqrt[n]{-c}} < 0$$

Attenzione: da quanto visto sopra,
Quando consideriamo $\sqrt[n]{A(x)}$

(•) se n è pari esso comporta un campo di esistenza: $A(x) \geq 0$

(•) se n è dispari non si ha alcun vincolo.

Equazioni e disequazioni irrazionali

$$\boxed{\sqrt[n]{f(x)} = g(x)}$$

<u>Oss 1</u> se <u>n è pari</u>, le soluzioni vanno cercate nell'insieme $A=\{x\in\mathbb{R}: f(x)\geq 0\}$

Essendo in A $\sqrt[n]{f(x)} \geq 0$

per avere l'uguaglianza si ha che le soluzioni vanno cercate in

$$B = \{x\in A : g(x)\geq 0\} =$$

$$= \{x\in\mathbb{R} : f(x)\geq 0 \text{ e } g(x)\geq 0\}$$

In B

$$\sqrt[n]{f(x)} = g(x) \iff f(x) = (g(x))^n$$

equazione polinomiale
che sappiamo risolvere

<u>Oss 2</u> se <u>n è dispari</u>, a differenza del caso precedente.

$$\sqrt[n]{f(x)} = g(x) \iff f(x) = (g(x))^n$$

si eleva ambo i membri alla n senza tener conto di alcun vincolo.

Disequazione <u>irrazionale</u>

$$\sqrt[n]{f(x)} < g(x)$$

<u>Oss 1</u> se <u>n è pari</u>

Le soluzioni vanno cercate in $A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq 0\}$

Ma in A $\sqrt[n]{f(x)} \geq 0$

$\Longrightarrow$ le soluzioni vanno cercate

in $B = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq 0 \text{ e } g(x) \geq 0\}$

In B

$$\sqrt[n]{f(x)} < g(x) \iff f(x) < (g(x))^n$$

equazione che
sappiamo risolvere

Oss2 se n è dispari, direttamente

$$\sqrt[n]{f(x)} < g(x) \iff f(x) < (g(x))^n$$

Al contrario

$$\sqrt[n]{f(x)} > g(x)$$

Oss1 Se n è pari, le soluzioni vanno cercate in $A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq 0\}$,

In A, troviamo che se $x \in A$ è
tale che $g(x) \leq 0$
allora la disuguaglianza $\sqrt[n]{f(x)} > g(x)$
è banalmente verificata

Oss 1 $\quad B_1 = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq 0 \text{ e } g(x) \leq 0\}$
è un insieme di soluzioni.

Mentre in $B_2 = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq 0 \text{ e } g(x) > 0\}$

$$\sqrt[n]{f(x)} > g(x) \iff f(x) > (g(x))^n$$

Oss 2 $\quad$ se n è dispari, allora

$$\sqrt[n]{f(x)} > g(x) \iff f(x) > (g(x))^n$$

Esempio

$$\sqrt{5x^2-3x-5} = 2x-1$$

CE $5x^2-3x-5 \geq 0$ (imposizione)

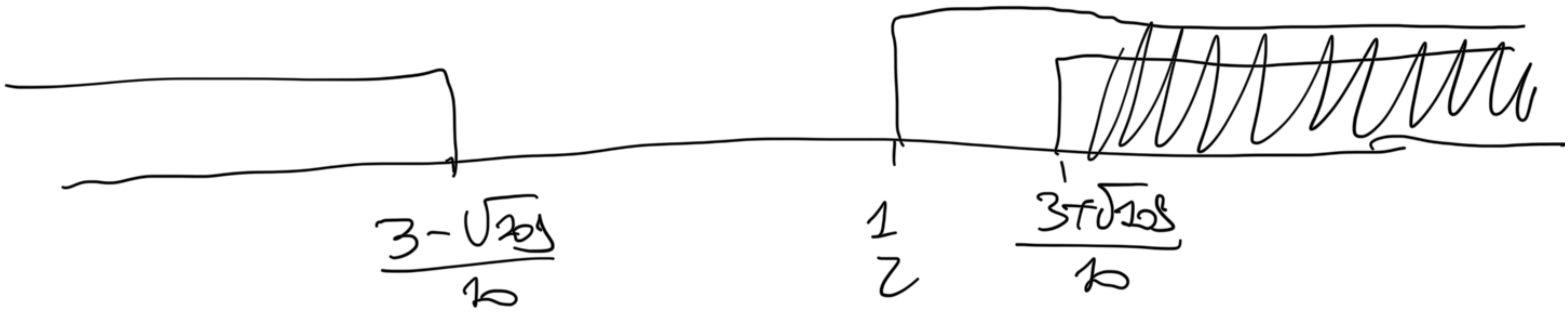
$$\Delta = 9+100 = 109$$

$$x_1 = \frac{3-\sqrt{109}}{10} \qquad x_2 = \frac{3+\sqrt{109}}{10}$$

CE $A = \left]-\infty, \frac{3-\sqrt{109}}{10}\right] \cup \left[\frac{3+\sqrt{109}}{10}, +\infty\right[$

cerco, in realtà, soluzioni in A :

$$2x-1 \geq 0 \qquad \left(x \geq \frac{1}{2}\right)$$



ossia lavoriamo in $\left[\frac{3+\sqrt{109}}{10}, +\infty\right[$

In $\left[\frac{3+\sqrt{109}}{10}, +\infty\right[$ è lecito elevare ambo i membri al quadrato, per otten…

$$5x^2-3x-5=(2x-1)^2$$

$$5x^2-3x-5=4x^2-4x+1$$

$$5x^2-3x-5-4x^2+4x-1=0$$

$$x^2+x-6=0$$

$$\Delta=1+24=25=5^2$$

sol $\quad x_1=-1-5 \qquad x_2=-1+5$

$\cancel{x_1 = -3}$ $\qquad\qquad$ $x_2 = 2$

essendo $2 \in \left[\frac{3+\sqrt{109}}{10} , +\infty \right[$

$\Longrightarrow$ essa è l'unica soluzione

$$\boxed{x = 2}$$

$$\boxed{(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$$

Esempio

$$\sqrt[3]{x^3+19} = x+1$$

$$\Longleftrightarrow \quad x^3+19 = (x+1)^3$$

$$x^3+19 = x^3+3x^2+3x+1^3$$

$$\cancel{x^3}+19-\cancel{x^3}-3x^2-3x-1=0$$

$$-3x^2-3x+18=0$$

$$3x^2+3x-18=0$$

$$\Delta = 9+12\cdot 9\cdot 2 =$$

$$= 9(1+24) = 9\cdot 25$$

$$= 3^{2} \cdot 5^{2}$$

<u>Sol</u> $x_1 = \dfrac{-3-15}{6}$ $\qquad x_2 = \dfrac{-3+15}{6}$

$$\boxed{x_1 = -3} \quad \boxed{x_2 = 2}$$

<u>Esempio</u> $\sqrt[4]{x^4+x^2-2} < x$

<u>CE</u> $x^4 + x^2 - 2 \geq 0 \qquad x^4 = (x^2)^2 = t^2$

chiamo $\boxed{t = x^2}$

$$t^2+t-2\geq 0$$

$$\Delta = 1+8=9 \qquad t_1=\frac{-1-3}{2} \quad , \quad t_2=\frac{-1+3}{2}$$

$$t \leq -2 \quad \text{o} \quad t \geq 1$$

Sostituisco $\quad \cancel{x^2 \leq -2} \quad$ o $\quad x^2 \geq 1$

$x^2-1\geq 0$

$\Delta = 0^2+4=2^2$ $\quad \left.\begin{matrix} x_1=-1 \\ x_2=1 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow$ sol $\left]-\infty,-1\right] \cup \left[1,+\infty\right[$

Ossia:

$$x^2-1\geq 0$$

$$\Delta = 4 = 2^2 \qquad x_1=-1 \, , \quad x_2=$$

$$\boxed{CE \quad]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[}$$

Risolvo

$$\sqrt[4]{x^4+x^2-2} < x$$

Osserviamo: se il 2° membro è negativo ($x \leq 0$) non posso avere soluzioni (essendo 1° membro positivo non può mai essere minore di 2° membro negativo!)

Ossia cerco soluzioni in $[1, +\infty[$

In tale regione sia il 1° membro che

il 2° membro sono positivi (avendo

I e II membro sono positivi (quindi

è lecita l'operazione di elevare alla 4ª)

Quindi,

$$x^4+x^2-2 < (x)^4$$

$$\cancel{x^4}+x^2-2-\cancel{x^4} < 0$$

$$x^2-2 < 0$$

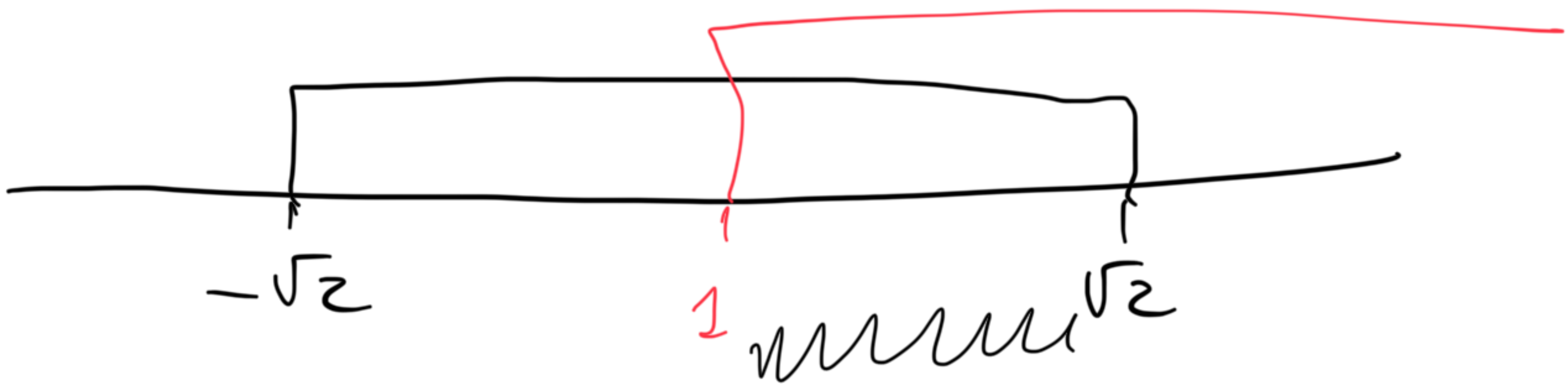
$$\Delta = 0^2 - 4\cdot 1\cdot(-2) = 8 = 2\cdot 2^2$$

$$x_1 = \frac{-0-2\sqrt{2}}{2} \qquad x_2 = \frac{-0+2\sqrt{2}}{2}$$

$x_1 = -\sqrt{2}$ $\qquad$ $x_2 = \sqrt{2}$

sol $\quad]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$, ricordo però che cerchiamo soluzioni in $[1, +\infty[$

Graficamente



concludo: $\boxed{\text{sol } \; [1, \sqrt{2}[}$

Esempio

$$\sqrt[3]{x^3-3x^2+2} < x-1$$

possiamo elevare ambo i membri al cubo ed ottenere

$$x^3-3x^2+2 < (x-1)^3$$

$$x^3-3x^2+2 < x^3-3x^2+3x-1$$

$$\cancel{x^3}-\cancel{3x^2}+2-\cancel{x^3}+\cancel{3x^2}-3x+1 < 0$$

$$-3x + 3 < 0$$

$$-3x < -3$$

Sol $\boxed{x > 1}$

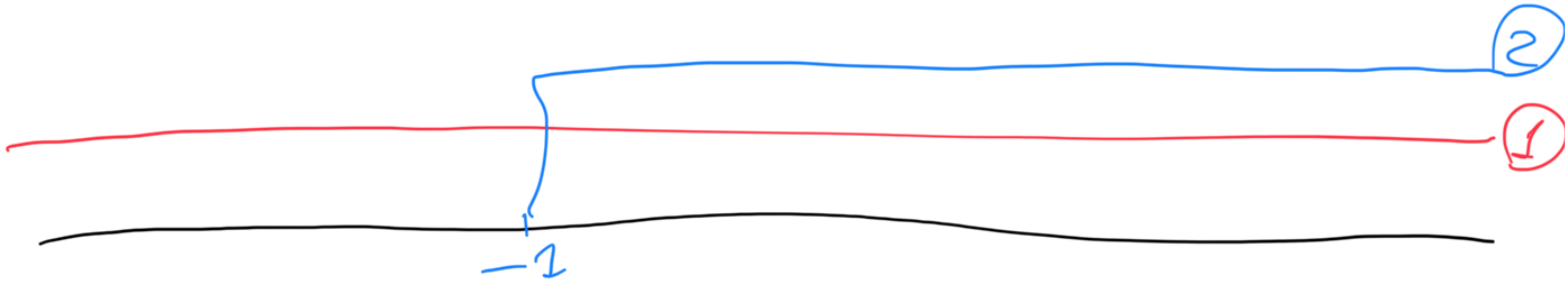
Esempio

$$\sqrt{x^2-2x+3} \leq \sqrt{x+1}$$

$$CE \quad \begin{cases} ① \quad x^2-2x+3 \geq 0 \\ ② \quad x+1 \geq 0 \end{cases}$$

(1) $x^2-2x+3 \geq 0$ $\quad \Delta = 4-12 < 0$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}$

(2) $x+1 \geq 0$ $\quad x \geq -1$



CE $[-1, +\infty[$

Risolvo $\sqrt{x^2-2x+3} \leq \sqrt{x+1}$

In CE entrambi i membri sono positivi

quindi posso elevare al quadrato

quindi posso elevarli al quadrato
per ottenere

$$x^2-2x+3 \leq x+1$$

$$x^2-2x+3-x-1 \leq 0$$

$$x^2-3x+2 \leq 0$$

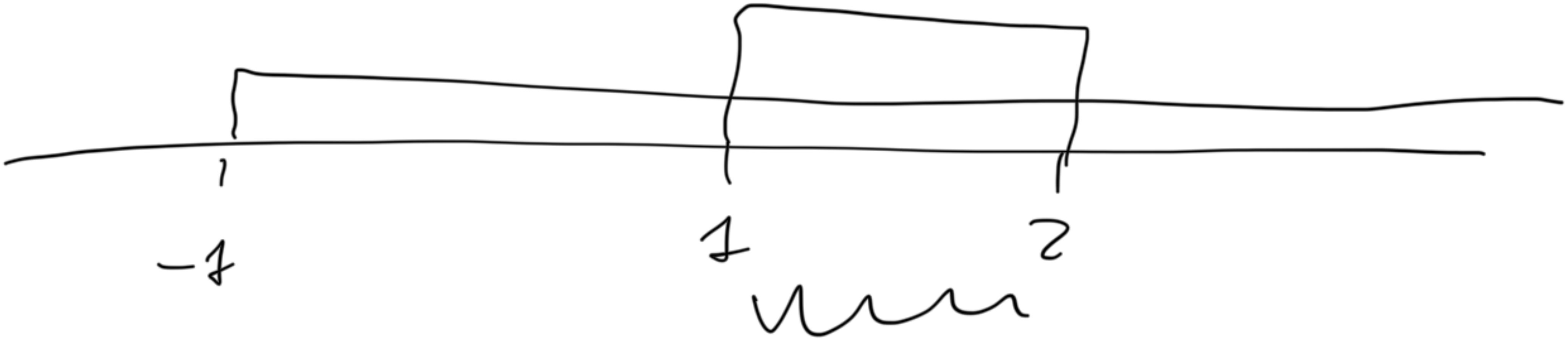
$$\Delta = 9-8=1$$

$$x_1 = \frac{3-1}{2} = 1$$

$$x_2 = \frac{3+1}{2} = 2$$

<u>Sol</u> $[1,2]$ ma
dobbiamo tener conto di CE

$[-1, +\infty[$



Conclusione: $\boxed{\text{Sol} \quad [1,2]}$

<u>Esempio</u>

$$\frac{3x}{x-2} + 1 \leq \frac{1}{x(x-2)}$$

CE $\boxed{x \neq 2, 0}$

$$\frac{3x}{} + 1 - \frac{1}{} \leq 0$$

$x-2$ $\qquad$ $x(x-2)$

$$\frac{3x - x + x(x-2) - 1}{x(x-2)} \le 0$$

$$\frac{4x^2 - 2x - 1}{x(x-2)} \le 0$$

segni discordi!

<u>Segno N</u>: $\quad 4x^2 - 2x - 1 \ge 0$

$$\Delta = 4 + 16 = 20$$

$$x_1 = \frac{2 - \sqrt{20}}{8}$$

$$x_2 = \frac{2 + \sqrt{20}}{8}$$

Ossia $\quad x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{4} \qquad x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$

$$\left]-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{4}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{5}}{4}, +\infty\right[$$

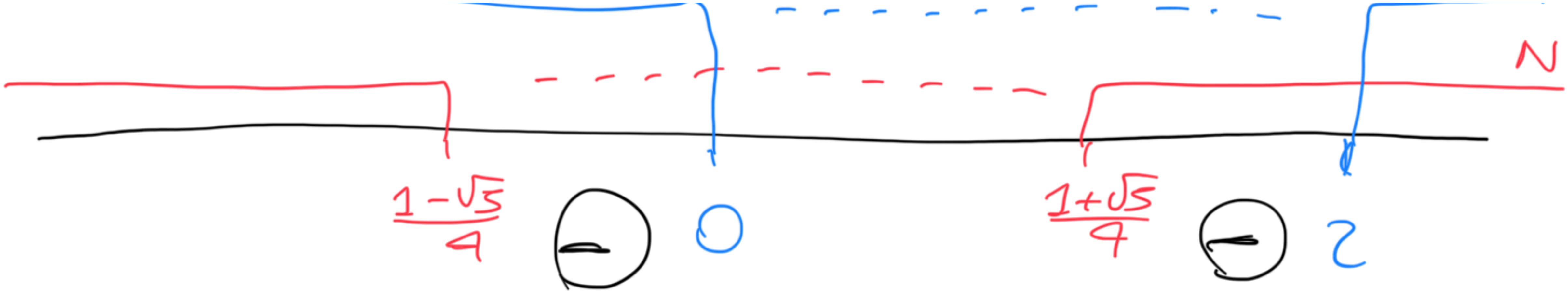
segno D : $\quad x(x-2) > 0$

$$x^2 - 2x > 0$$

$$\Delta = 4 = 2^2 \qquad x_1 = 0 \qquad x_2 = 2$$

$$]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$$

Graficamente



Sol $\left[\frac{1-\sqrt{5}}{4}, 0\right[\cup \left[\frac{1+\sqrt{5}}{4}, 2\right[$

Ricordo CE $x \neq 0, 2$

Esempio

$$\left| 1 + \frac{2-x}{x} \right| > 2$$

CE $x \neq 0$

$$\left| \frac{\cancel{x} + 2 - \cancel{x}}{x} \right| > 2$$

$$\left| \frac{2}{x} \right| > 2$$

$$\frac{2}{|x|} > 2$$

$$\frac{1}{|x|} > 1$$

esplicito il v.a.

se $x>0$ $\qquad \frac{1}{x} > 1 \qquad$ 1

se $x<0$ $\qquad \frac{1}{-x} > 1 \qquad$ 2

① $(x>0)$ $\qquad 1 > x \quad$ ossia $\quad x<1$

<u>Sol 1</u> $\quad]0, 1[$

② $(x<0)$ $\qquad \dfrac{1}{-x} > 1 \qquad$ (moltiplico ambo i membri per $-x>0$)

$$1 > -x$$

$$\iff x+1>0 \iff x>-1$$

Sol 2 $\quad]-1, 0[$

$$\Rightarrow Sol = Sol_1 \cup Sol_2 =$$

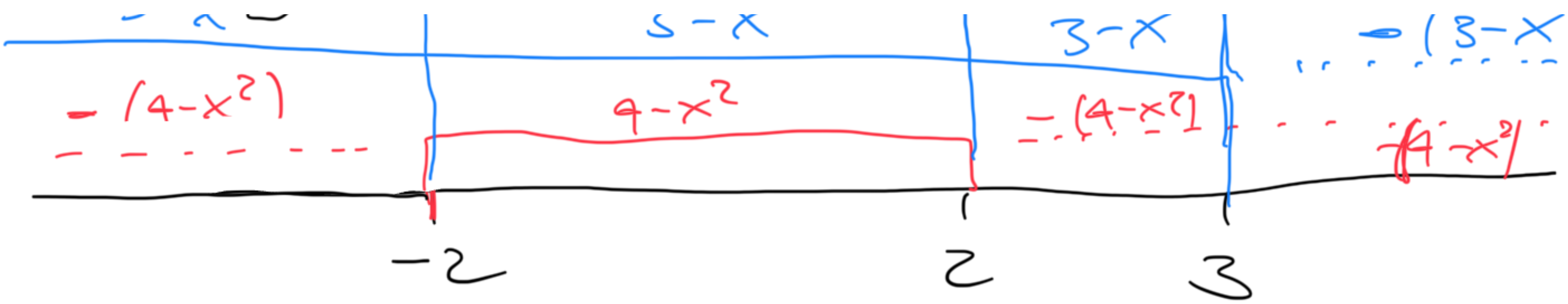
$$=]0,1[\cup]-1,0[=$$

$$=]-1,0[\cup]0,1[$$

<u>Esempio</u> $|4-x^2| - |3-x| > x$

$$4-x^2 \geq 0 \iff x^2-4 \leq 0 \iff [-2,2]$$

$$3-x \geq 0 \iff x \leq 3 \iff]-\infty, 3]$$



se $x<-2$ la diseq. si riscrive come

$$-(4-x^2)-(3-x)>x$$

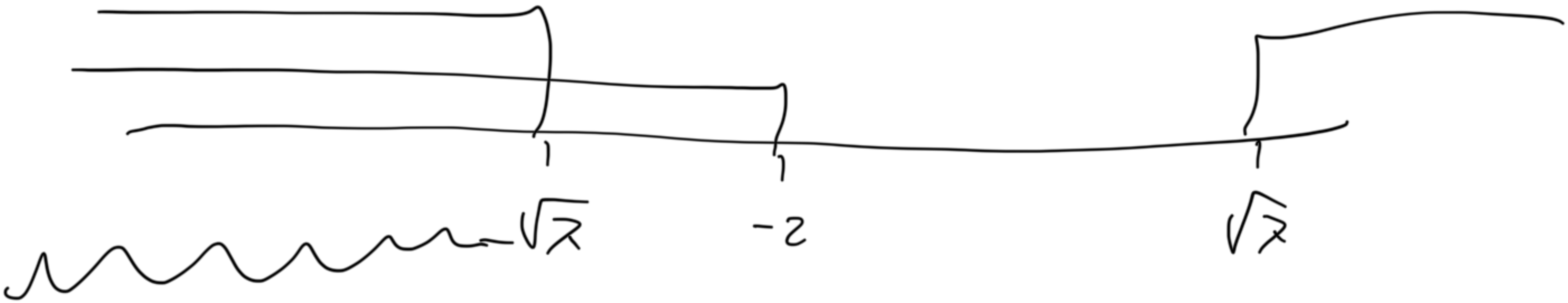
$$x^2-4+x-3>x$$

$$x^2+x-7>x$$

$$x^2-7>0$$

sol

$$]-\infty,-\sqrt{7}[\,\cup\,]\sqrt{7},+\infty[$$



sol 1 $\quad]-\infty, -\sqrt{2}[$

(da completare)